1. ***случай кратных комплексных корней характеричтического уравнения (возможен только при***

Пусть – корни кратности , . Им соответствуют линейно независимых решений:

*.*

# Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ n-го порядка. Теорема о наложении частных решений.

– линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами

***Теорема*** *(о структуре общего решения неоднородного ЛДУ n-го порядка).*

Пусть – частное решение ЛНДУ . Тогда

***Док-во***: нужно доказать, что такие, что функция – решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям

.

Решение задачи Коши существует и определено на в силу теоремы существования. Рассмотрим разность :

Т.е. – решение ЛОДУ; – ФСР ЛОДУ;

***Теорема*** *(о наложении частных решений).*

Пусть – частное решение ЛНДУ; ; – частное решение ЛНДУ; . Тогда – частное решение ЛНДУ

***Док-во***:

# Нахождение частных решений неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Пусть – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Рассмотрим ЛНДУ:

– квазимногочлен;

– многочлен степени ;

Тогда частное решение ЛНДУ (2.12.1) вида

,

– многочлен степени ; , если не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ; если – корень, то равен кратности корня .

*Замечание*. Коэффициенты - неопределенные (заранее не известные), находятся методом неопределенных коэффициентов.

*Пример 1.*

Соответствующее ЛОДУ: ,

Найдем .

;

– корень характеристического уравнения ЛОДУ кратности

,

,

,

Чтобы найти и , подставим функцию в ЛНДУ:

,

,

,

.

Коэффициент при 2

Коэффициент при .

Получаем СЛАУ относительно и

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами

– многочлен степени ;

– многочлен степени ;

Тогда

; – многочлены степени ;

, если не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ; равен кратности корня, если является корнем.

*Пример 1.*

*(*уравнение колебаний при наличии внешней периодической силы частоты *).*

*.*

*,*

*,*

*, .*

.

Найдем .

*,*

*(*частота внешней силы равна собственной частоте резонанс, амплитуда колебаний неограниченно возрастает*).*

Чтобы найти и , подставим в ЛНДУ:

.

Коэффициент при

Коэффициент при

*Пример 2.*

*,*

*,*

*,*

*,*

*,*

*,*

Чтобы найти и , подствим в ЛНДУ:

Коэффициент при .

Коэффициент при .

# Метод вариации постоянных решения неоднородных ЛДУ n-го порядка (вывод для ).

Пусть – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами. Рассмотрим ЛНДУ:

Соответствующее ЛОДУ:

Общее решение ЛОДУ:

.

– ФСР ЛОДУ,

– произвольные постоянные.

***Теорема***. Общее решение ЛНДУ () имеет вид

,

– ФСР соответствующего ЛОДУ,

производные функций определяются из СЛАУ

*Замечание* 1. СЛАУ (2.13.2) имеет единственное решение для , т.к. ее определитель ().

*Замечание 2.*  Функций

Тогда

,

– произвольные постоянные.

***Док-во*** (случай ). Рассмотрим ЛНДУ

– линейный дифференциальный оператор 2-го порядка.

– произвольные постоянные

СЛАУ (2.13.2) имеет вид

, или

.

1. Покажем, что если и удовлетворяют (2.13.3), то функция – решение ЛНДУ (2.13.1).

в силу (2.13.3)).

в силу (2.13.3)).

Тогда

Таким образом – решение ЛНДУ (2.13.1).

1. Решив СЛАУ (2.13.3), получим решение вида

.

Покажем, что для , такие, что решение , соответствующее и , удовлетворяет начальным условиям

.

Для и получим систему

- СЛАУ с определителем , т.к. – ФСР ЛОДУ,

т.е. – общее решение.

*Пример*.

(метод неопределенных коэффициентов неприменим!).

Соответствующее ЛОДУ:

,

,

,

,

,

,

,

,